

Penyelesaian

Contoh Soal Olimpiade Matematika

Fadjar Shadiq, M.App.Sc
(fadjar_p3g@yahoo.com & www.fadjarp3g.wordpress.com)

Berikut ini adalah penyelesaian contoh soal pada Olimpiade Matematika, OSN, dan OSTN. Cobalah untuk menyelesaikan soal itu sendiri dahulu. Jika mengalami kesulitan, lihat petunjuknya. Jika masih kesulitan, baru Anda melihat penyelesaian ini. Ok?

1. Misalkan bilangan 6-angka itu adalah:

A	2	0	0	9	B
---	---	---	---	---	---

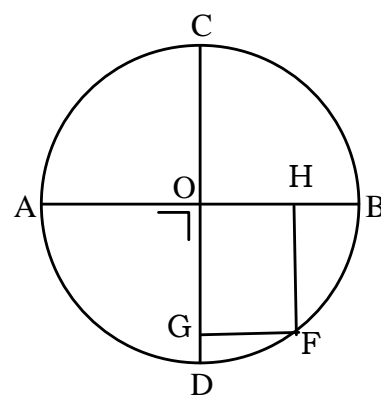
Agar bilangan tersebut habis dibagi 8 maka tiga angka terakhir, yaitu 09B harus habis dibagi 8. Jadi $B = 6$. sehingga didapat.

A	2	0	0	9	6
---	---	---	---	---	---

Agar bilangan tersebut habis dibagi 3 maka jumlah nilai angka-angkanya harus habis dibagi 3. Jadi $A = 1$, $A = 4$, atau $A = 7$. Yang memenuhi $A = 4$. Jadi bilangan dimaksud adalah:

4	2	0	0	9	6
---	---	---	---	---	---

2. Lingkaran yang digambar Ani adalah sebagai berikut. Diketahui bahwa $OGFH$ berbentuk persegi panjang. Dengan demikian, $GH = OF$ karena keduanya merupakan diagonalnya. Karena OF adalah jari-jari, maka $GH = OF = r = 20\text{ cm}$.



3. Perhatikan sekali lagi kotak-kotak persegi di bawah ini.

A	B	C	→ 144
9	D	E	→ 126
F	G	*	→ 20
↓	↓	↓	
72	105	48	

G bernilai 5 karena 5 merupakan faktor dari 20 (baris terbawah) dan faktor dari 105 (kolom tengah). Selanjutnya D bernilai 7 karena 7 merupakan faktor dari 126 (baris tengah) dan faktor dari 105 (kolom tengah). Setelah itu didapat $B = 3$; $E = 2$; sehingga didapat:

A	B=3	C	→ 144
9	D=7	E=2	→ 126
F	G=5	*	→ 20
↓	↓	↓	
72	105	48	

Selanjutnya, dengan mencoba-coba akan didapat: $F = 1$; $A = 8$, $C = 6$, dan $* = 4$.

$$4. \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{10100} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{100.101}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

5. Perhatikan tabel ini.

Negara	Main	Menang	Seri	Kalah	Selisih Gol
Ivory Coast	2	2	0	0	5-1
Mali	2	1	1	0	1-0
Nigeria	2	0	1	1	0-1
Benin	2	0	0	2	1-5

Pantai Gading (*Ivory Coast*) menang 2 kali. Negara yang pernah kalah hanya Nigeria dan Benin. Dengan demikian, Pantai Gading (*Ivory Coast*) menang dari Nigeria dan Benin. Mali harus bermain seri dengan Nigeria. Akibat selanjutnya, Mali harus menang dari Benin. Perhatikan selisih gol yang didapat Mali, yaitu 1-0. Dengan demikian, Mali menang dari Benin dengan skor 1-0 (agar menang), dan seri lawan Nigeria dengan skor 0-0 (agar seri). Karena Nigeria seri melawan Mali dengan skor 0-0; maka Pantai Gading menang dari Nigeria dengan skor 1-0. Terakhir dapat disimpulkan hasil pertandingan Pantai Gading melawan Benin adalah 4-1.

6. Buatlah diagramnya. Alternatifnya adalah:

Didapat empat persamaan berikut sebagai model matematikanya, yaitu:

$$b^2 + c^2 = 3^2 \quad \dots\dots\dots (1);$$

$$b^2 + a^2 = 11^2 \quad \dots\dots\dots (2);$$

$$c^2 + d^2 = 12^2 \quad \dots\dots\dots (3);$$

$$d^2 + a^2 = OR^2 \quad \dots\dots\dots (4).$$

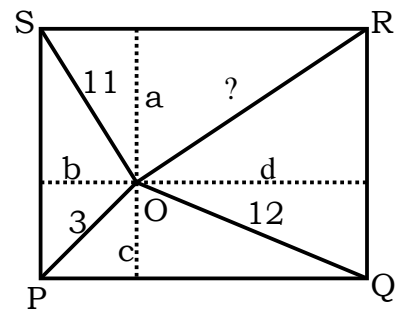
Jika perasaman (2) dikurangi dengan perasaman (1) akan didapat:

$$a^2 - c^2 = 121 - 9 = 112 \quad \dots\dots\dots(5)$$

Jika perasaman (5) ditambah dengan perasaman (3) akan didapat:

$$d^2 + a^2 = 112 + 144 = 256$$

$$OR^2 = 256 \Rightarrow OR = \sqrt{256} = 16.$$



$$7. 2xy - 5x + y = 55 \Leftrightarrow (2x + 1)y = 55 + 5x \Leftrightarrow y = \frac{2\frac{1}{2}(2x + 1) + 52\frac{1}{2}}{(2x + 1)} = 2\frac{1}{2} + \frac{105}{2(2x + 1)}$$

Bentuk $\frac{105}{(2x + 1)}$ harus merupakan bilangan bulat agar didapat y sebagai bilangan bulat. Dengan demikian, nilai $(2x + 1)$ harus merupakan faktor dari

105. Jadi, nilai $(2x + 1)$ yang memenuhi adalah $\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 7; \pm 15; \pm 21; \pm 35; \pm 105$. Ke-16 nilai untuk $2x + 1$ tersebut merupakan bilangan ganjil; sehingga semuanya akan memberi pasangan nilai (x, y) yang bilangan bulat. Jadi ada 16 pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $2xy - 5x + y = 55$.

$$\begin{aligned}
 8. \quad (5^6 - 1) &= (5^2 - 1)(5^4 + 5^2 + 1) \\
 &= (5 - 1)(5 + 1)(651) \\
 &= (4)(6)(3 \cdot 7 \cdot 31) \\
 &= (2^3)(3^2)(7^1)(31^1)
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa bentuk a^n memiliki $(n + 1)$ buah pembagi (faktor) jika a merupakan bilangan prima.

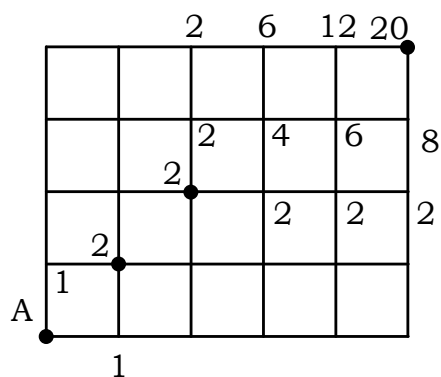
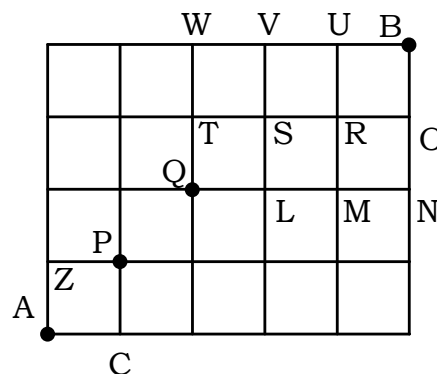
Dengan demikian, $5^6 - 1$ seluruhnya memiliki $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 48$ buah faktor. Banyaknya faktor ganjil dari $5^6 - 1$ adalah $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$.

Dengan demikian banyak faktor genap = $48 - 12 = 36$ buah faktor.

$$9. \quad f(y) = \frac{a^y + a^{-y}}{a^y - a^{-y}} = 2 \Rightarrow a^y + a^{-y} = 2a^y - 2a^{-y} \Rightarrow 3a^{-y} = a^y \Rightarrow a^{2y} = 3.$$

$$\text{Jadi, } f(2y) = \frac{a^{2y} + a^{-2y}}{a^{2y} - a^{-2y}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

10. Perhatikan gambar di kanan. Ditentukan bahwa rute perjalanan harus melintasi lintasan PQ. Perhatikan bahwa masing-masing hanya ada satu rute dari A ke C dan dari A ke Z. Dengan demikian, hanya ada tepat dua rute dari A ke P. Selanjutnya, hanya ada tepat dua rute dari A ke Q. Penjelasan tersebut dapat dinyatakan dengan gambar di kiri bawah ini.



Secara lengkap, bilangan-bilangan pada setiap perpotongan garis menunjukkan banyaknya rute dari A. Ada 2 rute dari A ke T dan ada 2 rute juga dari A ke L; sehingga akan ada 4 rute dari A ke S. Begitu seterusnya seperti ditunjukkan diagram di samping kiri ini. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa banyaknya rute perjalanan dari kota A ke kota B adalah 20 cara.